

单位球 Dirichlet 空间上的紧 Toeplitz 算子*

陈建军^{1,2}, 王晓峰³

(1. 肇庆学院数学与统计学院, 广东 肇庆 526061;

2. 中山大学数学学院, 广东 广州 510275;

3. 广州大学数学与信息科学学院, 数学与交叉科学广东普通高校重点实验室,
广东 广州 510006)

摘要: 研究单位球上 Dirichlet 空间上的 Toeplitz 算子的紧性, 得到结论: 有限个具有有界符号的 Toeplitz 算子乘积的有限和是一个紧算子, 等价于它的 Berezin 型变换消失于单位球面。

关键词: Toeplitz 算子; Berezin 型变换; Dirichlet 空间; 单位球

中图分类号: O177 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2016) 06-0074-05

Compact Toeplitz operators on the Dirichlet space over unit ball

CHEN Jianjun^{1,2}, WANG Xiaofeng³

(1. School of Mathematics and Statistics, Zhaoqing University, Zhaoqing 526061, China;

2. School of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

3. School of Mathematics and Information Science and Key Laboratory of Mathematics
and Interdisciplinary Sciences of the Guangdong Higher Education Institute,
Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: The compactness of Toeplitz operators on Dirichlet space is studied. It is proved that finite sums of finite products of Toeplitz operators with bounded symbols are compact if and only if their Berezin-type transforms vanish on the boundary of the unit ball.

Key words: Toeplitz operator; Berezin type transform; Dirichlet space; unit ball

记 $\mathbb{C}^n$ 为 n 维复空间, B_n 是其中的开单位球。令 V 是一个正规化 Lebesgue 体积测度, 使得 $V(B_n) = 1$ 。单位球上的 Bergman 空间 $L_a^2(B_n)$ 是一个由满足如下性质的全纯函数所组成的函数空间,

$$\|f\|_2 = \left(\int_{B_n} |f(z)|^2 dV(z) \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

其中 f 是一个单位球上的全纯函数。给定 $f, g \in L_a^2(B_n)$, Bergman 空间中的内积定义为:

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_{B_n} f(z) \overline{g(z)} dV(z)$$

因为点值泛函 $f \mapsto f(z)$ 在 $L_a^2(B_n)$ 是连续的, 所以

由 Riesz 定理, 记

$$\bar{K}_z(w) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(|\alpha| + n)!}{n! \alpha!} \bar{z}^\alpha w^\alpha$$

为 $L_a^2(B_n)$ 中的再生核, 其中

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \in \mathbf{Z}^+,$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$$

Sobolev 空间 $L^{2,1}(B_n)$ 是一个由满足如下性质的复值函数所组成的函数空间,

$$\|f\|_{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \int_{B_n} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial z_i} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} \right|^2 \right) dV(z) \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

* 收稿日期: 2015-12-08

基金项目: 广州市教育局科技计划资助项目 (2012A018); 国家自然科学基金资助项目 (11471084, 11301101)

作者简介: 陈建军 (1986 年生), 男; 研究方向: 泛函分析; 通讯作者: 王晓峰; E-mail: wangxiaofeng514@hotmail.com

显然, $L^{2,1}(B_n)$ 是一个 Hilbert 空间, 它的内积定义为:

$$\langle f, g \rangle_{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial f}{\partial z_i}, \frac{\partial g}{\partial z_i} \right\rangle_2 + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}, \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_i} \right\rangle_2, \\ \forall f, g \in L^{2,1}(B_n)$$

Dirichlet 空间 $D^2(B_n)$ 是 $L^{2,1}(B_n)$ 的一个子空间, 它由 $L^{2,1}(B_n)$ 中所有无常数项的全纯函数所组成的. $D^2(B_n)$ 的内积继承于 $L^{2,1}(B_n)$ 的内积, 具体为:

$$\langle f, g \rangle_{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial f}{\partial z_i}, \frac{\partial g}{\partial z_i} \right\rangle_2, \forall f, g \in D^2(B_n)$$

通过简单的计算, Dirichlet 空间 $D^2(B_n)$ 中的再生核为:

$$K_z(w) = \sum_{|\alpha| \geq 1} \frac{(|\alpha| + n - 1)!}{|\alpha| n! \alpha!} \bar{z}^\alpha w^\alpha$$

到目前为止, Bergman 空间上的 Toeplitz 算子的研究结果已经相当丰富, 特别是单位圆盘的情形. 在单位球的情形里, 黄昭波^[1] 研究 Bergman 空间 $L_a^p(B_n)$ 上的 Hankel 算子和 Toeplitz 算子, 并证明了带有界符号的 Hankel 算子, Toeplitz 算子的紧性与 p 无关. 2004 年, 李颂孝等^[2] 证明了具有 BT 符号的 Toeplitz 算子, 它是紧的当且仅当它的 Berezin 变换消失于单位球面.

然而, 关于 Dirichlet 空间的研究, 也有一定的成果. 比如卢玉峰等^[3] 研究了测度符号的 Toeplitz 算子, 并得出了它的有界性和紧性条件. 在单位球的情形里, 比如有: 曹广福^[4] 研究了具有连续符号的 Toeplitz 算子; 曹广福等^[5] 进一步研究具有有界符号的 Toeplitz 算子.

利用文献 [6] 的思想方法, 将其中关于 Toeplitz 算子的结果推广到单位球区域上. 由于单位球比单位圆盘拓扑结构复杂, Bergman 空间和 Dirichlet 空间再生核的某些性质在单位球面附近只有等价关系而不是相等关系, 不过还是得到相类似的结论. 具体地说, 本文主要研究单位球上 Dirichlet 空间上的 Toeplitz 算子的紧性. 得到结论: 有限个具有有界符号的 Toeplitz 算子乘积的有限和是一个紧算子, 等价于它的 Berezin 型变换消失于单位球面.

与 Toeplitz 算子相关的其它算子, 如 Wiener-Hopf 算子和复合算子, 请参考文献 [7-8].

1 预备知识

为了证明主要定理, 先给出一些预备知识.

引理 1 如果 $g \perp D^2$, 则 $\frac{\partial g}{\partial z_i} \perp L_a^2(B_n)$, 其中

$i = 1, 2, \dots, n$.

证明 参考文献 [4].

在本文里, 如果存在两个常数 C_1, C_2 , 使得当 $|z| \rightarrow 1^-$ 时, $C_1 |g(z)| \leq |f(z)| \leq C_2 |g(z)|$, 则我们称 f 和 g 等价, 记为: “ $f \sim g$ ”.

引理 2 对于任意的 $z, w \in B_n \setminus \{0\}$, 有

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial z_i} K_z(w) \sim \sum_{|\alpha| \geq 1} \frac{(|\alpha| + n - 1)!}{n! \alpha!} \bar{z}^\alpha w^\alpha$$

证明 显然 $\{z^\alpha\}$ 是 Bergman 空间中的一组基,

并且 $\|z^\alpha\|_2 = \sqrt{\frac{n! \alpha!}{(n + |\alpha|)!}}$. 结合引理 1, 可以得到

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial z_i} K_z(w) = \left\langle \sum_{|\beta| \geq 0} \frac{(|\beta| + n)!}{n! \beta!} \bar{z}^\beta \eta^\beta, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(|\alpha| + n - 1)!}{n! \alpha!} \bar{w}^\alpha \frac{\partial}{\partial \eta_i} \eta^\alpha \right\rangle_2 = \\ \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha| \geq 1} \sum_{|\beta| \geq 0} \frac{(|\alpha| + n - 1)!}{|\alpha| n! \alpha!} \cdot \\ \frac{(|\beta| + n)!}{n! \beta!} \bar{z}^\beta w^\alpha \langle \eta^\beta, \alpha_i \eta^{\alpha - e_i} \rangle_2 = \\ \sum_{|\alpha| \geq 1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \frac{1}{z_i} \right) \frac{(|\alpha| + n - 1)!}{n! \alpha!} \bar{z}^\alpha w^\alpha$$

当 $z_i \neq 0$ 时, 对于每一个 α , 存在一个常数 C 满足

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \frac{1}{z_i} \right| \leq C. \text{ 证毕.}$$

根据引理 2, 我们记

$$K_z^1(w) = \sum_{|\alpha| \geq 1} \frac{(|\alpha| + n - 1)!}{n! \alpha!} \bar{z}^\alpha w^\alpha$$

为一种辅助核. 它有如下的性质:

引理 3 对于任意给定的 $z, w \in B_n \setminus \{0\}$, 有

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial w_i} K_z^1(w) = \left(\sum_{i=1}^n \bar{z}_i \right) \bar{K}_z(w)$$

以及

$$\|K_z^1\|_{1/2}^2 = \left(\sum_{i=1}^n |z|^2 \right) \bar{K}_z^2$$

进一步有 $\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial w_j} K_z(w) \sim \bar{K}_z(w)$.

证明 由引理 1,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial w_i} K_z^1(w) = \left\langle \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \eta_i} K_z^1(\eta), \bar{K}_z(\eta) \right\rangle_2 =$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \eta_i} \sum_{|\alpha| \geq 1} \frac{(|\alpha| + n - 1)!}{n! \alpha!} \bar{z}^\alpha \eta^\alpha, \right.$$

$$\sum_{|\beta| \geq 0} \frac{(|\beta| + n)!}{n! \beta!} \overline{w^\beta \eta^\beta} \Bigg\rangle_2 =$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(|\alpha| + n)!}{n! (\alpha + e_i)!} \frac{(|\alpha| + n)!}{n! \alpha!}$$

$$(\alpha_i + 1) \frac{n! \alpha!}{(|\alpha| + n)!} \bar{z}^{\alpha + e_i} w^\alpha =$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \bar{z}_i \right) \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(|\alpha| + n)!}{n! \alpha!} \bar{z}^\alpha w^\alpha$$

进一步结合引理 2, 得到

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial}{\partial w_j} K_z(w) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \frac{1}{\bar{z}_i} \right) \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial w_j} K_z^1(w) =$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \frac{1}{\bar{z}_i} \right) \left(\sum_{j=1}^n \bar{z}_j \right) \bar{K}_z(w) \sim \bar{K}_z(w)$$

因此,

$$\|K_z^1\|_{1/2}^2 = \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial}{\partial w_i} K_z^1(w), \frac{\partial}{\partial w_i} K_z^1(w) \right\rangle_2 =$$

$$\sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial}{\partial w_i} \sum_{|\alpha| \geq 1} \frac{(|\alpha| + n - 1)!}{n! \alpha!} \bar{z}^\alpha w^\alpha, \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial w_i} \sum_{|\beta| \geq 1} \frac{(|\beta| + n - 1)!}{n! \beta!} \bar{z}^\beta w^\beta \right\rangle_2 =$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha|, |\beta| \geq 1} \frac{(|\alpha| + n - 1)!}{n! \alpha!} \frac{(|\beta| + n - 1)!}{n! \beta!} \cdot$$

$$\langle \alpha_i w^{\alpha - e_i}, \beta_i w^{\beta - e_i} \rangle_2 \bar{z}^\alpha \bar{z}^\beta =$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha| \geq 1} \frac{(|\alpha| + n - 1)!}{n! \alpha!} \frac{(|\alpha| + n - 1)!}{n! \alpha!} \cdot$$

$$\alpha_i \alpha_i \langle w^{\alpha - e_i}, w^{\alpha - e_i} \rangle_2 |z^\alpha|^2 =$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha| \geq 1} \frac{(|\alpha| + n - 1)!}{n! (\alpha - e_i)!} |z^\alpha|^2 =$$

$$\left(\sum_{i=1}^n |z|^2 \right) \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(|\alpha| + n)!}{n! \alpha!} |z^\alpha|^2$$

证毕。

接下来, 记 $k_z^1(w) = \frac{K_z^1(w)}{\|K_z^1\|_{\frac{1}{2}}} \in D^2$ 为辅助核

$K_z^1(w)$ 的正规化。

引理 4 对任意非零元 $z, w \in B_n$,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial w_i} k_z^1 \sim \bar{k}_z$$

其中 $\bar{k}_z(w) = \frac{\bar{K}_z(w)}{\|\bar{K}_z\|_2}$ 。进而, 当 $z \rightarrow \partial B_n$ 时, $k_z^1 \xrightarrow{w} 0$ 。

证明 根据引理 3

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial w_i} k_z^1 = \frac{1}{\|K_z^1\|} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial w_i} K_z^1 = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{z}_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}} \frac{\bar{K}_z(w)}{\|\bar{K}_z\|_2}$$

所以只要 $z \neq 0, w \neq 0$, 有 $\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial w_i} k_z^1 \sim \bar{k}_z$ 。

给定 $f \in D^2$, 使得 $\|f\|_{1/2} = 1$, 则

$$\langle f, k_z^1 \rangle_{1/2} = \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial}{\partial w_i} f(w), \frac{\partial}{\partial w_i} k_z^1(w) \right\rangle_2 \sim$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial w_i} f(w), \bar{k}_z \right\rangle_2$$

由引理 1 可知 $\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial w_i} f(w) \in L_a^2$, 又因为在 Bergman

空间中, $\bar{k}_z$ 弱收敛于 0, 所以 $k_z^1 \xrightarrow{w} 0$ 。证毕。

引理 5 给定函数列 $\{f_k\} \subseteq D^2$, 如果它每一个元都满足 $\|f_k\|_{1/2} = 1$ 以及当 $k \rightarrow \infty$ 时, 它弱收敛于 0, 则当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\|f_k\|_2 \rightarrow 0$ 。

证明 参考文献 [3] 中的定理 5。证毕。

记 $L^\infty(B_n)$ 为单位球上本性函数空间。定义

$$L^{\infty,1}(B_n) = \left\{ u \in L^{2,1}(B_n) \mid u, \frac{\partial u}{\partial z_i}, \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_i} \in L^\infty(B_n) \right\}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n$, 其上的范数定义为:

$$\|u\|_{\infty,1} = \max_{i=1,2,\dots,n} \max \left\{ \|u\|_\infty, \left\| \frac{\partial u}{\partial z_i} \right\|_\infty, \left\| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_i} \right\|_\infty \right\}$$

定义 1 取 $u \in L^{\infty,1}(B_n)$, Dirichlet 空间上 Toeplitz 算子 T_u 定义为:

$$T_u f(z) = \sum_{i=1}^n \int_{B_n} \frac{\partial(u f)}{\partial w_i} \frac{\overline{\partial K_z(w)}}{\partial w_i} dV(w)$$

其中 $f \in D^2$ 。

Toeplitz 算子 T_u 的 Berezin 型变换 $\hat{T}_u$ 定义为

$$\hat{T}_u(z) = \sum_{i=1}^n \int_{B_n} \frac{\partial(T_u k_z^1)(w)}{\partial w_i} \frac{\overline{\partial k_z^1(w)}}{\partial w_i} dV(w)$$

相应地, 取 $v \in L^\infty$, Bergman 空间上 Toeplitz 算子 $\mathcal{T}_v$ 以及它的 Berezin 变换 $\mathcal{T}_v$ 分别定义为

$$\mathcal{T}_v f(z) = \int_{B_n} (vf)(w) \overline{K_z(w)} dV(w);$$

$$\mathcal{T}_v(z) = \int_{B_n} \mathcal{T}_v k_z(w) \overline{k_z(w)} dV(w)$$

其中 $f \in L_a^2(B_n)$ 。

引理 6 给定 $u \in L^{\infty,1}(B_n)$, 则 Toeplitz 算子 T_u 是一个有界算子。

证明 由 Toeplitz 算子的定义以及 $K_z(w)$ 的性质, 可得: 对于任意的 $f, g \in D^2$,

$$\langle T_u f, g \rangle_{1/2} = \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{\partial}{\partial z_j} (T_u f)(z), \frac{\partial}{\partial z_j} g(z) \right\rangle_2 =$$

$$\sum_{j=1}^n \left\langle \frac{\partial}{\partial z_j} \left\langle \sum_{i=1}^n \frac{\partial(u f)}{\partial w_i}, \frac{\partial}{\partial w_i} K_z(w) \right\rangle_2, \frac{\partial}{\partial z_j} g(z) \right\rangle_2 =$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{\partial(uf)}{\partial w_i}, \left\langle \frac{\partial}{\partial z_j} g(z), \frac{\partial}{\partial w_i} \frac{\partial}{\partial z_j} K_w(z) \right\rangle_2 \right\rangle_2 \sim$$

$$\sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial(uf)}{\partial w_i}, \frac{\partial g}{\partial w_i} \right\rangle_2 = \sum_{i=1}^n \left\langle f(w) \frac{\partial u}{\partial w_i}, \frac{\partial g}{\partial w_i} \right\rangle_2 +$$

$$\sum_{i=1}^n \left\langle u(w) \frac{\partial f}{\partial w_i}, \frac{\partial g}{\partial w_i} \right\rangle_2$$

因此, 存在一个常数 C , 使得

$$|\langle T_u f, g \rangle_{\frac{1}{2}}| \leq C \left\| f \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial w_i} \right\|_2 \left\| \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial w_i} \right\|_2 +$$

$$C \left\| u \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial w_i} \right\|_2 \left\| \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial w_i} \right\|_2 \leq$$

$$C \|u\|_{\infty, 1} \|g\|_{\frac{1}{2}} (\|f\|_2 + \|f\|_{1/2})$$

这表明 T_u 是一个有界算子。证毕。

2 主要定理

取 $u_{i,j} \in L^{\infty, 1}(i, j = 1, 2, \dots, n)$, 定义

$$S = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n T_{u_{i,j}}$$

定理 1 下列 3 个结论是等价的:

- (i) S 是一个紧算子;
- (ii) 当 $z \rightarrow \partial B_n$ 时, $\|S k_z^1\|_{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$;
- (iii) 当 $z \rightarrow \partial B_n$ 时, $\hat{S}(z) \rightarrow 0$ 。

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii): 由引理 4 可知, $k_z^1 \xrightarrow{w} 0$ 。所以如果 S 是紧的, 那么 $\|S k_z^1\|_{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$ 。

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 结合 Berezin 型变换的定义和 Hölder 不等式, 有

$$|\hat{S}(z)| \leq \sum_{i=1}^n \int_{B_n} \left| \frac{\partial(S k_z^1)(w)}{\partial w_i} \frac{\overline{\partial k_z^1(w)}}{\partial w_i} \right| dV(w) \leq$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_{B_n} \left| \frac{\partial(S k_z^1)(w)}{\partial w_i} \right|^2 dV(w) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\left(\int_{B_n} \left| \frac{\partial k_z^1(w)}{\partial w_i} \right|^2 dV(w) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|S k_z^1\|_{\frac{1}{2}} \|k_z^1\|_{\frac{1}{2}}$$

因此, 一旦 $\|S k_z^1\|_{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$, 则有 $\hat{S}(z) \rightarrow 0$ 。

(iii) $\Rightarrow$ (i): 不失一般性, 只需证明 $S = \sum T_{u_1} T_{u_2}$ 这一情形即可。为了方便表述, 算子中的小指标往往省略。

由于结论 (iii) 是成立的, 所以当 $z \rightarrow \partial B_n$ 时, 我们有

$$\widehat{T_{u_1} T_{u_2}}(z) = \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial(T_{u_1} T_{u_2} k_z^1)(w)}{\partial w_i}, \frac{\partial k_z^1(w)}{\partial w_i} \right\rangle_2 \rightarrow 0$$

结合上面的引理, 对上式进一步地计算, 得到

$$\sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial(T_{u_1} T_{u_2} k_z^1)(w)}{\partial w_i}, \frac{\partial k_z^1(w)}{\partial w_i} \right\rangle_2 =$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_n} T_{u_2} k_z^1 \frac{\partial u_1}{\partial w_i} \frac{\overline{\partial k_z^1(w)}}{\partial w_i} dV(w) +$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_n} u_1 \frac{\partial(T_{u_2} k_z^1)(w)}{\partial w_i} \frac{\overline{\partial k_z^1(w)}}{\partial w_i} dV(w) \sim$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_n} T_{u_2} k_z^1 \frac{\partial u_1}{\partial w_i} \frac{\overline{\partial k_z^1(w)}}{\partial w_i} dV(w) +$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_n} u_1 k_z^1 \frac{\partial u_2}{\partial w_i} \frac{\overline{\partial k_z^1(w)}}{\partial w_i} dV(w) +$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_n} u_1 u_2 \frac{\partial k_z^1(w)}{\partial w_i} \frac{\overline{\partial k_z^1(w)}}{\partial w_i} dV(w)$$

由于 $k_z^1 \xrightarrow{w} 0$, 有

$$\left| \sum_{i=1}^n \int_{B_n} T_{u_2} k_z^1 \frac{\partial u_1}{\partial w_i} \frac{\overline{\partial k_z^1(w)}}{\partial w_i} dV(w) \right| \leq$$

$$\|T_{u_2} k_z^1\|_{\infty} \|u_1\|_{\frac{1}{2}} \|k_z^1\|_{\frac{1}{2}} \rightarrow 0;$$

$$\left| \sum_{i=1}^n \int_{B_n} u_1 k_z^1 \frac{\partial u_2}{\partial w_i} \frac{\overline{\partial k_z^1(w)}}{\partial w_i} dV(w) \right| \leq$$

$$\|u_1 k_z^1\|_{\infty} \|u_2\|_{\frac{1}{2}} \|k_z^1\|_{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

这表明当 $|z| \rightarrow 1^-$ 时, 只有

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_n} u_1 u_2 \frac{\partial k_z^1(w)}{\partial w_i} \frac{\overline{\partial k_z^1(w)}}{\partial w_i} dV(w)$$

这一项需要分析。事实上, 由于结论 (iii) 成立, 所以当 $|z| \rightarrow 1^-$ 时, 可知

$$\int_{B_n} u_1 u_2 \bar{k}_z \overline{k_z} dV(w) \sim$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_n} u_1 u_2 \frac{\partial k_z^1(w)}{\partial w_i} \frac{\overline{\partial k_z^1(w)}}{\partial w_i} dV(w) \rightarrow 0$$

记 $\mathcal{S} \triangleq \sum \prod \mathcal{T}_{u_{i,j}}$ 为 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子, 由文献 [2, 9-10] 中的结论, 上式表明 $\mathcal{S}$ 是紧的。

接下来, 取函数列 $\{f_k\} \subseteq D^2$ 使得其中的每一个函数都满足 $\|f_k\|_{1/2} = 1$ 以及当 $k \rightarrow \infty$ 时, $f_k \xrightarrow{w} 0$, 这时, 有

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_n} \frac{\partial(T_{u_1} T_{u_2} f_k)(w)}{\partial w_i} \frac{\overline{\partial(T_{u_1} T_{u_2} f_k)(w)}}{\partial w_i} dV(w) \sim$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_n} T_{u_2} f_k \frac{\partial u_1}{\partial w_i} \frac{\overline{\partial(T_{u_1} T_{u_2} f_k)(w)}}{\partial w_i} dV(w) +$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_n} u_1 f_k \frac{\partial u_2}{\partial w_i} \frac{\overline{\partial(T_{u_1} T_{u_2} f_k)(w)}}{\partial w_i} dV(w) +$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_n} u_1 u_2 \frac{\partial f_k}{\partial w_i} \frac{\overline{\partial(T_{u_1} T_{u_2} f_k)(w)}}{\partial w_i} dV(w)$$

根据引理 5, 知道 $T_{u_2} f_k \xrightarrow{w} 0, \frac{\partial f_k}{\partial w_i} \xrightarrow{w} 0, (k \rightarrow \infty)$, 因

此, 当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$\left| \sum_{i=1}^n \int_{B_n} T_{u_2} f_k \frac{\partial u_1}{\partial w_i} \overline{\frac{\partial (T_{u_1} T_{u_2} f_k)(w)}{\partial w_i}} dV(w) \right| \leq \\ \|T_{u_2} f_k\|_2 \|u_1\|_{\frac{1}{2}} \|T_{u_1} T_{u_2} f_k\|_{\frac{1}{2}} \rightarrow 0; \\ \left| \sum_{i=1}^n \int_{B_n} u_1 f_k \frac{\partial u_2}{\partial w_i} \overline{\frac{\partial (T_{u_1} T_{u_2} f_k)(w)}{\partial w_i}} dV(w) \right| \leq \\ \|u_1 f_k\|_2 \|u_2\|_{\frac{1}{2}} \|T_{u_1} T_{u_2} f_k\|_{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

继续接着计算

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_n} u_1 u_2 \frac{\partial f_k}{\partial w_i} \overline{\frac{\partial (T_{u_1} T_{u_2} f_k)(w)}{\partial w_i}} dV(w) \sim \\ \sum_{i=1}^n \int_{B_n} u_1 u_2 \frac{\partial f_k}{\partial w_i} \overline{T_{u_2} f_k \frac{\partial u_1}{\partial w_i}} dV(w) + \\ \sum_{i=1}^n \int_{B_n} u_1 u_2 \frac{\partial f_k}{\partial w_i} \overline{u_1 f_k \frac{\partial u_2}{\partial w_i}} dV(w) + \\ \sum_{i=1}^n \int_{B_n} u_1 u_2 \frac{\partial f_k}{\partial w_i} \overline{u_1 u_2 \frac{\partial f_k}{\partial w_i}} dV(w)$$

同理, 当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_n} u_1 u_2 \frac{\partial f_k}{\partial w_i} \overline{T_{u_2} f_k \frac{\partial u_1}{\partial w_i}} dV(w) \rightarrow 0; \\ \sum_{i=1}^n \int_{B_n} u_1 u_2 \frac{\partial f_k}{\partial w_i} \overline{u_1 f_k \frac{\partial u_2}{\partial w_i}} dV(w) \rightarrow 0$$

之前, 我们已经知道 Toeplitz 算子 $\mathcal{A} \triangleq \sum \Pi \mathcal{T}_{u_{i,j}}$ 是一个紧算子, 因此, 由文献 [9-10],

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_n} u_1 u_2 \frac{\partial f_k}{\partial w_i} \overline{u_1 u_2 \frac{\partial f_k}{\partial w_i}} dV(w) \rightarrow 0$$

总的来说, 已经证得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle T_{u_1} T_{u_2} f_k, T_{u_1} T_{u_2} f_k \right\rangle_{1/2} = 0$$

即 S 是一个紧算子。证毕。

参考文献:

- [1] 黄昭波. Bergman 空间上的 Hankel 算子和 Toeplitz 算子[J]. 复旦学报(自然科学版), 1991, 30(2): 151 - 157.
- [2] 李颂孝, 胡俊云. 单位球上 Bergman 空间上的紧算子[J]. 数学学报, 2004, 47(5): 837 - 844.
- [3] LU Y F, SUN S H. Toeplitz Operators on Dirichlet Spaces [J]. Acta Math Sinica, 2001, 17(4): 643 - 648.
- [4] 曹广福. Dirichlet 空间上的 Toeplitz 算子[J]. 数学年刊, 2000, 21(4): 499 - 512.
- [5] 曹广福, 朱涪涛. Dirichlet 空间上 Toeplitz 算子的紧性[J]. 数学学报, 2001, 44(2): 241 - 248.
- [6] 夏锦, 王晓峰, 曹广福. Dirichlet 空间上的紧算子[J]. 数学物理学报, 2009, 29(5): 1196 - 1205.
- [7] 谢佩珠, 曹广福. R_+^n 上的 Wiener-Hopf 算子[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2013, 52(1): 59 - 62.
- [8] 何忠华, 曹广福, 何莉. Bloch-Orlicz 型空间上积分型算子与复合算子的乘积[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, 55(1): 44 - 47.
- [9] ENGLIS M. Compact Toeplitz operators via the Berezin transform on bounded symmetric domains [J]. Integr Equ Oper Theory, 1999, 33: 426 - 455.
- [10] ENGLIS M. Erratum to compact Toeplitz operators via the Berezin Transform on bounded symmetric domains [J]. Integr Equ Oper Theory, 1999, 34: 500 - 501.